南京工业大学土木工程学院2022年度科学报告会

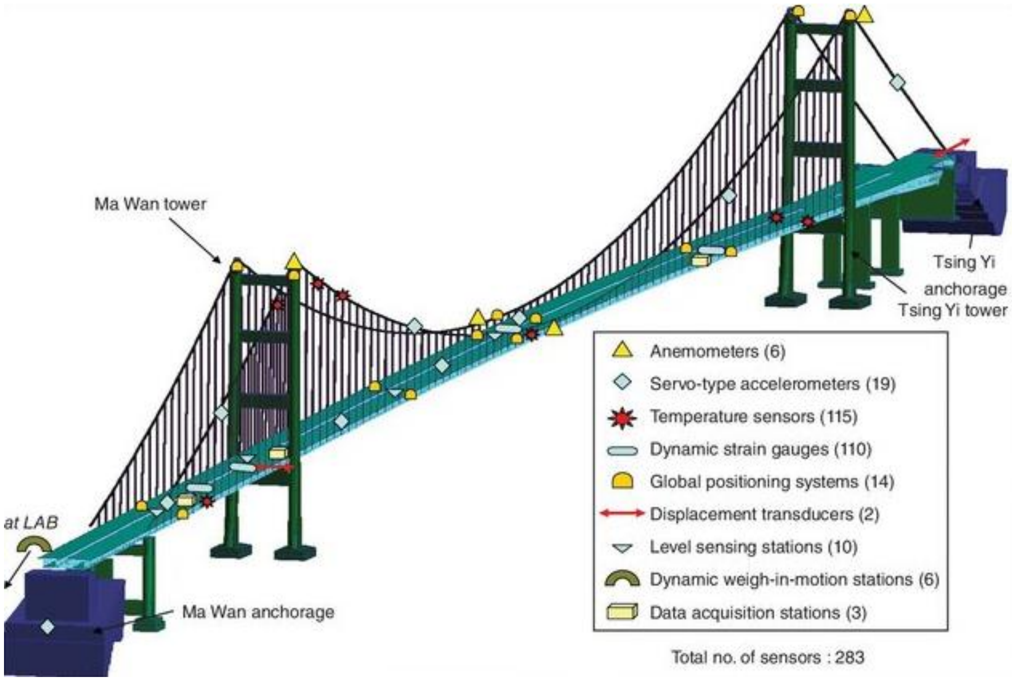
基于小波-伽辽金的结构动力响应重构方法研究

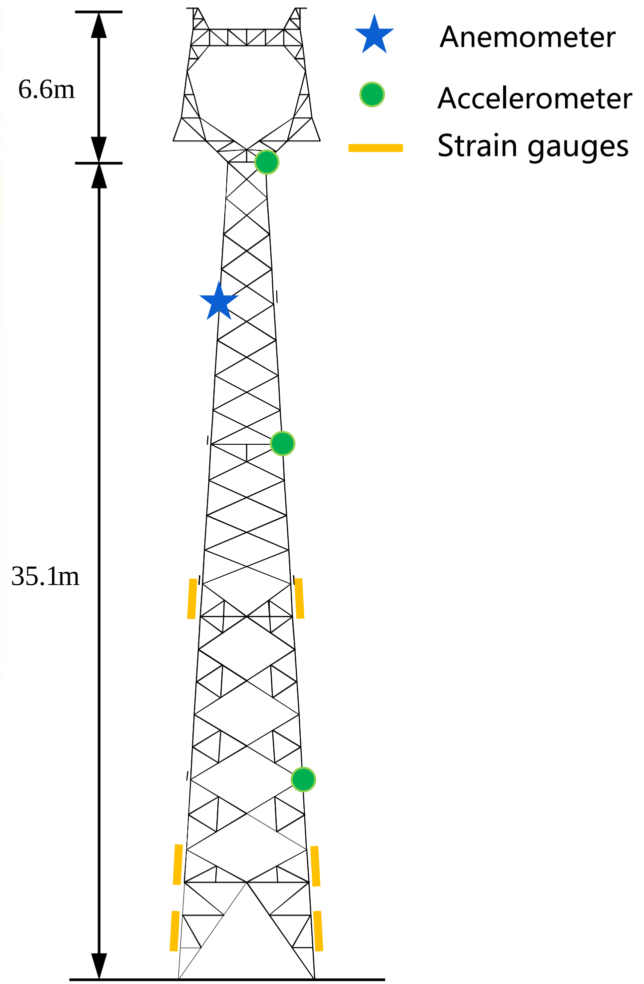
赖 韬 讲师

2022年12月28日

汇报内容

1 研究背景

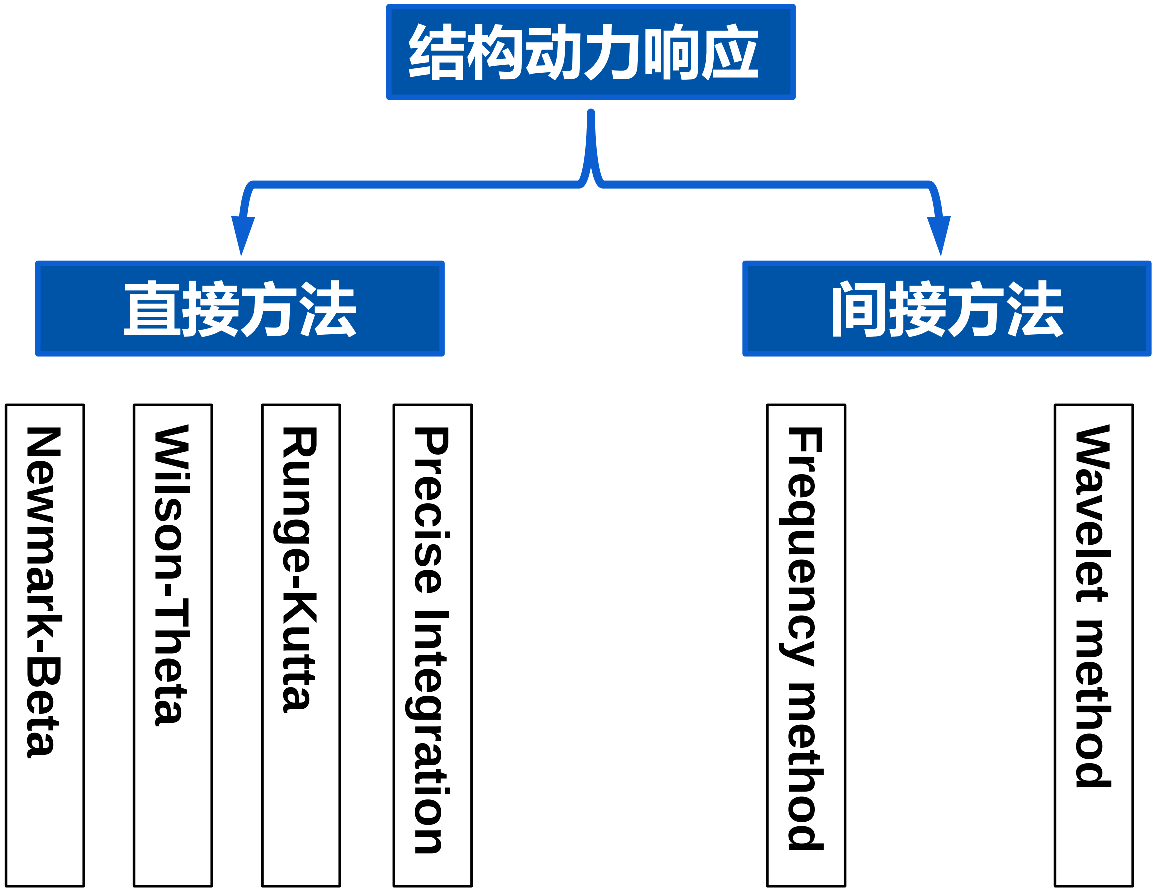




结构动力响应：

- **反映结构在外荷载作用下状态变化**
- **是结构健康状况评估的重要基础和依据**

1 研究背景



构建多分辨率框架下基于小波-伽辽金的动态响应重构方法

2 基于小波-伽辽金的动力响应重构方法

基于小波-伽辽金的动力响应重构方法

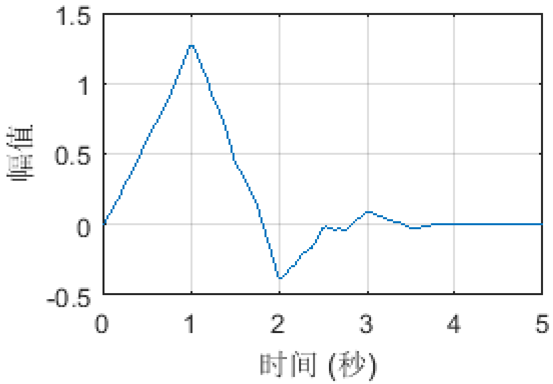
- 函数逼近：基于小波基函数将输入和输出在小波域中展开
- 域变换：将二阶时域振动微分方程变换到小波域线性方程组
- 连接系数计算：计算小波域线性方程组中的常系数
- 初始条件及边界问题：考虑初值问题及域变换引起的边界问题

2 基于小波-伽辽金的动力响应重构方法

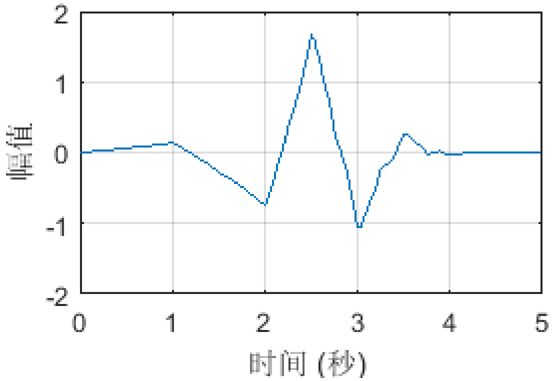
1 函数逼近

Mallat和Meyer指出正交小波基的构造可以在统一的框架下进行(多分辨率分析)

- Db小波的紧支性
- 尺度函数和小波函数满足时域二尺度方程
- 归一化条件
- 正交性
- 消失矩特性



(a) 尺度函数



(b) 小波函数

Db3小波的尺度函数和小波函数

2 基于小波-伽辽金的动力响应重构方法

1 函数逼近

研究平方可积函数在以Db小波尺度函数为基底的函数逼近问题

$$x^j(t)=\sum_{k=I}^{J}\hat{x}_k\phi_{j,k}(t)$$

假定时间范围是 $[0,d]$

$$\hat{x}_k=2^{-j/2}\int_{\mathbb{R}}x(t)\phi\left(2^jt-k\right)dt$$

因为Db小波是紧支的，且 $\phi(0)=\phi(2N-1)=0$，经变量代换可得

$$\hat{x}_k=2^{j/2}\int_0^{N-1}x\left(2^{-j}(t+k)\right)\phi(t)dt$$

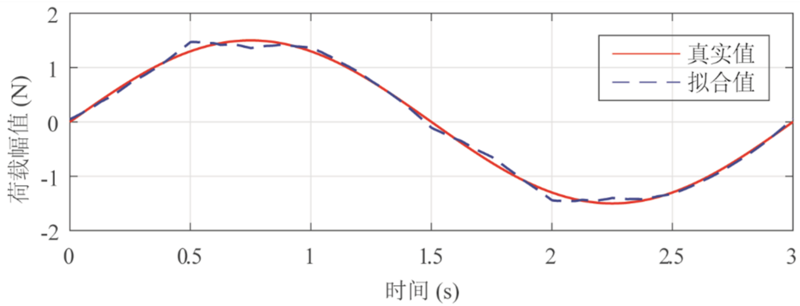
确定时移参数k的范围 $k\in\left[2\text{-}2N,2^jd-1\right]$

2 基于小波-伽辽金的动力响应重构方法

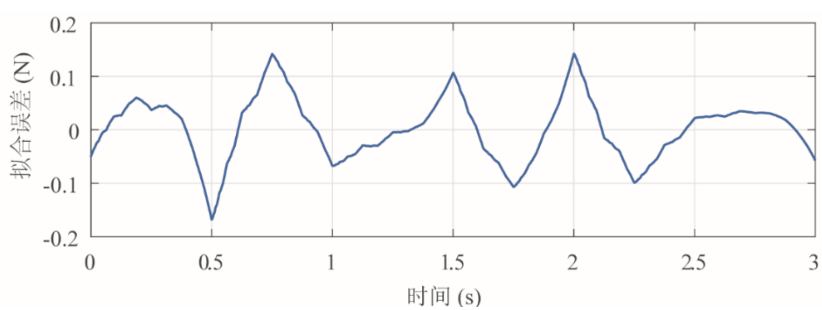
1 函数逼近

示例：$x(t)=1.5\sin(2\pi t/3),\ t\in[0,3]$

RE=5.4671%



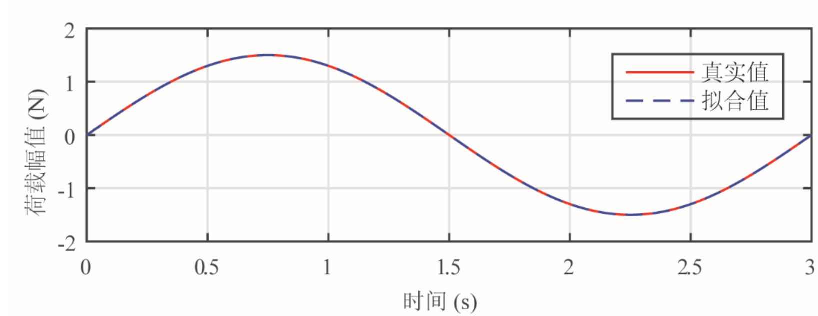
(a) 真实信号与重构信号



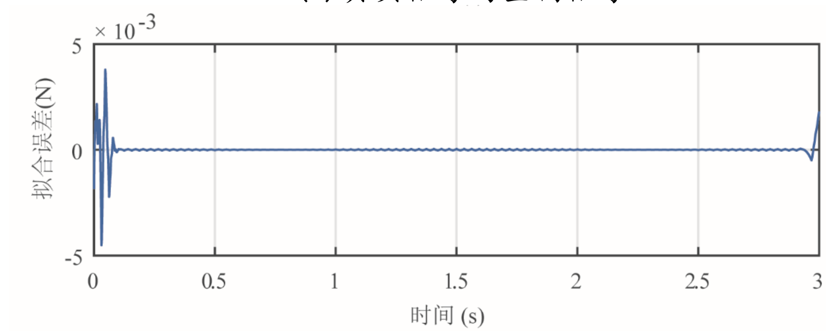
(b) 重构误差

正弦函数在分解尺度为1时的重构结果

RE=0.0287%



(a) 真实信号与重构信号



(b) 重构误差

正弦函数在分解尺度为5时的重构结果

2 基于小波-伽辽金的动力响应重构方法

2 域变换

结构振动可以表征为二阶微分方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{G}\mathbf{f}\left(t\right)$$

模态坐标变换

$$\begin{cases}\ddot{\eta}_r+2\zeta_r\omega_r\dot{\eta}_r+\omega_r^2\eta_r=\dfrac{1}{M_r}\varphi_r^T\mathbf{G}\mathbf{f}\left(t\right) & r=1\\ \ddot{\eta}_r+2\zeta_r\omega_r\dot{\eta}_r+\omega_r^2\eta_r=\dfrac{1}{M_r}\varphi_r^T\mathbf{G}\mathbf{f}\left(t\right) & r=2,\cdots,n-1\\ \ddot{\eta}_r+2\zeta_r\omega_r\dot{\eta}_r+\omega_r^2\eta_r=\dfrac{1}{M_r}\varphi_r^T\mathbf{G}\mathbf{f}\left(t\right) & r=n\end{cases}$$

2 基于小波-伽辽金的动力响应重构方法

2 域变换

考虑单自由度系统振动的二阶微分方程：

$$M\ddot{x}(t)+C\dot{x}(t)+Kx(t)=f\left(t\right)$$

基于小波函数展开方法，输入和输出可以表示为

$$x\left(t\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\phi_{j,k}\left(t\right)\qquad \dot{x}\left(t\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\phi'_{j,k}\left(t\right)\qquad \ddot{x}\left(t\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\phi''_{j,k}\left(t\right)\qquad f\left(t\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}_k\phi_{j,k}\left(t\right)$$

$$M\sum_{k}\hat{x}_k\phi''_{j,k}\left(t\right)+C\sum_{k}\hat{x}_k\phi'_{j,k}\left(t\right)+K\sum_{k}\hat{x}_k\phi_{j,k}\left(t\right)=\sum_{k}\hat{f}_k\phi_{j,k}\left(t\right)$$

$$\boxed{M\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\Gamma^{2,0}_{j,k,l}+C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\Gamma^{1,0}_{j,k,l}+K\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\delta_{k,l}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}_k\delta_{k,l}}$$

3 计算连接系数

$$M\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\Gamma^{2,0}_{j,k,l}+C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\Gamma^{1,0}_{j,k,l}+K\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\delta_{k,l}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}_k\delta_{k,l}$$

$$\Gamma^{1,0}_{j,k,l}=\int\phi'_{j,k}(t)\phi_{j,l}(t)dt$$

$$\Gamma^{2,0}_{j,k,l}=\int\phi''_{j,k}(t)\phi_{j,l}(t)dt$$

小波分解尺度 $j=0$			
$\Gamma^1_{0,-4}$	-3.4246575337500E-04	$\Gamma^2_{0,-4}$	5.3571428565500E-03
$\Gamma^1_{0,-3}$	-1.4611872145557E-02	$\Gamma^2_{0,-3}$	1.1428571428588E-01
$\Gamma^1_{0,-2}$	1.4520547945687E-01	$\Gamma^2_{0,-2}$	-8.7619047622391E-01
$\Gamma^1_{0,-1}$	-7.4520547946357E-01	$\Gamma^1_{0,-1}$	3.3904761906178E+00
$\Gamma^1_{0,0}$	0.0000000000000E+00	$\Gamma^2_{0,0}$	-5.2678571430725E+00
$\Gamma^1_{0,1}$	7.4520547946357E-01	$\Gamma^2_{0,1}$	3.3904761906175E+00
$\Gamma^1_{0,2}$	-1.4520547945687E-01	$\Gamma^2_{0,2}$	-8.7619047622380E-01
$\Gamma^1_{0,3}$	1.4611872145557E-02	$\Gamma^2_{0,3}$	1.1428571428588E-01
$\Gamma^1_{0,4}$	3.4246575337500E-04	$\Gamma^2_{0,4}$	5.3571428565530E-03

小波分解尺度 $j=6$			
$\Gamma^1_{6,-4}$	-2.7397260270020E-03	$\Gamma^2_{6,-4}$	2.7428571425536E+00
$\Gamma^1_{6,-3}$	-1.1689497716445E-01	$\Gamma^2_{6,-3}$	5.8514285714372E+01
$\Gamma^1_{6,-2}$	1.1616438356549E+00	$\Gamma^2_{6,-2}$	-4.4860952382663E+02
$\Gamma^1_{6,-1}$	-5.9616438357085E+00	$\Gamma^2_{6,-1}$	1.7359238095962E+03
$\Gamma^1_{6,0}$	4.0000000000000E-15	$\Gamma^2_{6,0}$	-2.6971428572530E+03
$\Gamma^1_{6,1}$	5.9616438357085E+00	$\Gamma^2_{6,1}$	1.7359238095961E+03
$\Gamma^1_{6,2}$	-1.1616438356549E+00	$\Gamma^2_{6,2}$	-4.4860952382657E+02
$\Gamma^1_{6,3}$	1.1689497716445E-01	$\Gamma^2_{6,3}$	5.8514285714369E+01
$\Gamma^1_{6,4}$	2.7397260270030E-03	$\Gamma^2_{6,4}$	2.7428571425552E+00

2 基于小波-伽辽金的动力响应重构方法

3 计算连接系数

$$M\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\Gamma_{j,k,l}^{2,0}+C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\Gamma_{j,k,l}^{1,0}+K\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{x}_k\delta_{k,l}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}_k\delta_{k,l}$$

$$\Gamma_{j,k,l}^{1,0}=\int\phi_{j,k}'(t)\phi_{j,l}(t)dt$$

$$\Gamma_{j,k,l}^{2,0}=\int\phi_{j,k}''(t)\phi_{j,l}(t)dt$$

小波分解尺度 $j=8$			
$\Gamma_{8,-4}^{1}$	-5.4794520540042E-03	$\Gamma_{8,-4}^{2}$	2.1942857140429E+01
$\Gamma_{8,-3}^{1}$	-2.3378995432891E-01	$\Gamma_{8,-3}^{2}$	4.6811428571497E+02
$\Gamma_{8,-2}^{1}$	2.3232876713099E+00	$\Gamma_{8,-2}^{2}$	-3.5888761906130E+03
$\Gamma_{8,-1}^{1}$	-1.1923287671417E+01	$\Gamma_{8,-1}^{2}$	1.3887390476770E+04
$\Gamma_{8,0}^{1}$	7.7672247866423E-15	$\Gamma_{8,0}^{2}$	-2.1577142858024E+04
$\Gamma_{8,1}^{1}$	1.1923287671417E+01	$\Gamma_{8,1}^{2}$	1.3887390476769E+04
$\Gamma_{8,2}^{1}$	-2.3232876713099E+00	$\Gamma_{8,2}^{2}$	-3.5888761906126E+03
$\Gamma_{8,3}^{1}$	2.3378995432891E-01	$\Gamma_{8,3}^{2}$	4.6811428571495E+02
$\Gamma_{8,4}^{1}$	5.4794520540064E-03	$\Gamma_{8,4}^{2}$	2.1942857140441E+01

小波分解尺度 $j=10$			
$\Gamma_{10,-4}^{1}$	-1.0958904108009E-02	$\Gamma_{10,-4}^{2}$	1.7554285712343E+02
$\Gamma_{10,-3}^{1}$	-4.6757990865783E-01	$\Gamma_{10,-3}^{2}$	3.7449142857198E+03
$\Gamma_{10,-2}^{1}$	4.6465753426199E+00	$\Gamma_{10,-2}^{2}$	-2.8711009524904E+04
$\Gamma_{10,-1}^{1}$	-2.3846575342834E+01	$\Gamma_{10,-1}^{2}$	1.1109912381416E+05
$\Gamma_{10,0}^{1}$	1.6000000000000E-14	$\Gamma_{10,0}^{2}$	-1.7261714286419E+05
$\Gamma_{10,1}^{1}$	2.3846575342834E+01	$\Gamma_{10,1}^{2}$	1.1109912381415E+05
$\Gamma_{10,2}^{1}$	-4.6465753426199E+00	$\Gamma_{10,2}^{2}$	-2.8711009524900E+04
$\Gamma_{10,3}^{1}$	4.6757990865782E-01	$\Gamma_{10,3}^{2}$	3.7449142857196E+03
$\Gamma_{10,4}^{1}$	1.0958904108013E-02	$\Gamma_{10,4}^{2}$	1.7554285712353E+02

2 基于小波-伽辽金的动力响应重构方法

4 初始条件及边界

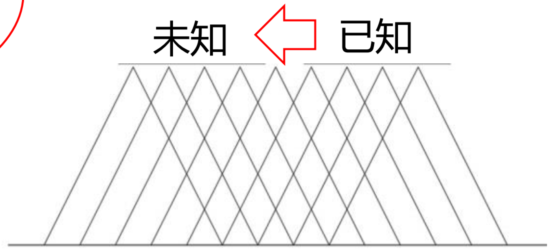
初始条件 $x_0 = \sum_k \hat{x}_k \phi_{j,k}(0)$ $\dot{x}_0 = \sum_k \hat{x}_k \phi'_{j,k}(0)$

边界问题通过小波外推技术实现，小波外推技术的基本思想是基于函数可以通过阶次不大于P-1（P=N小波的消失矩）多项式来准确表达的事实。

$$\mu_m^l = \int \tau^l \phi(\tau - m) d\tau$$

$$2^{-j/2} \begin{bmatrix} \mu_0^0 & \mu_0^1 & \cdots & \mu_0^{p-1} \\ \mu_1^0 & \mu_1^1 & \cdots & \mu_1^{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{2N-1}^0 & \mu_{2N-1}^1 & \cdots & \mu_{2N-1}^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{-2N+2} \\ \hat{x}_{-2N+3} \\ \cdots \\ \hat{x}_1 \end{bmatrix}$$

$$2^{-j/2} \begin{bmatrix} \mu_{-2N+2}^0 & \mu_{-2N+2}^1 & \cdots & \mu_{-2N+2}^{p-1} \\ \mu_{-2N+3}^0 & \mu_{-2N+2}^1 & \cdots & \mu_{-2N+3}^{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{-1}^0 & \mu_{-1}^1 & \cdots & \mu_{-1}^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{-4N+4} \\ \hat{x}_{-4N+3} \\ \cdots \\ \hat{x}_{-2N+1} \end{bmatrix}$$



[1] WILLIAMS J R, AMARATUNGA K. A discrete wavelet transform without edge effects using wavelet extrapolation [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 1997, 3 (4): 435-449.

3 数值算例与分析

1 单自由度系统

$$M\ddot{x}(t)+C\dot{x}(t)+Kx(t)=f\left(t\right)$$

$M=1 \quad K=39.4784\,N/m$

采样频率1024Hz，持续采样6s

$$f\left(t\right)=\sin\left(8\pi t\right)+\cos\left(3\pi t\right)$$

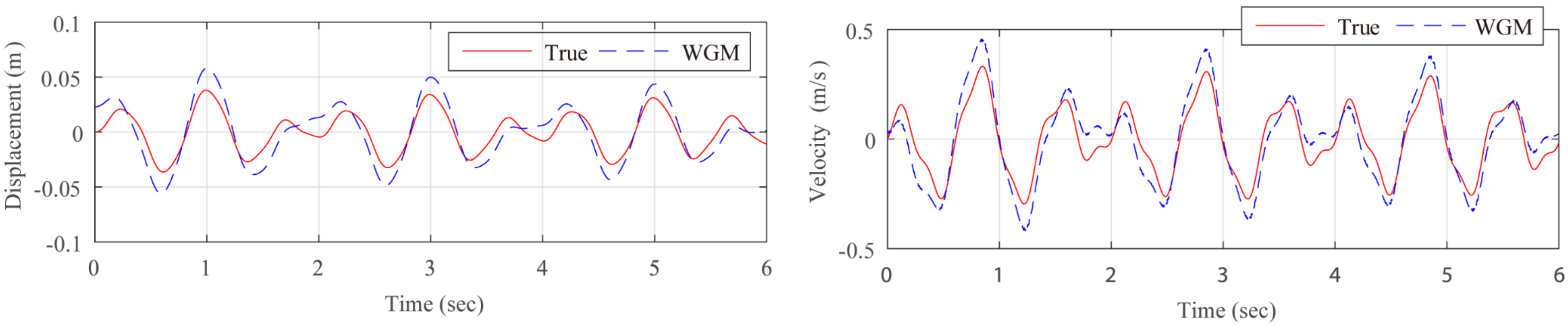
采用归一化的均方根误差评价动力响应重构的精度

$$NRMS=\frac{\left\|\boldsymbol{d}_e-\boldsymbol{d}_r\right\|_2}{\left\|\boldsymbol{d}_r\right\|_2}\times 100\%$$

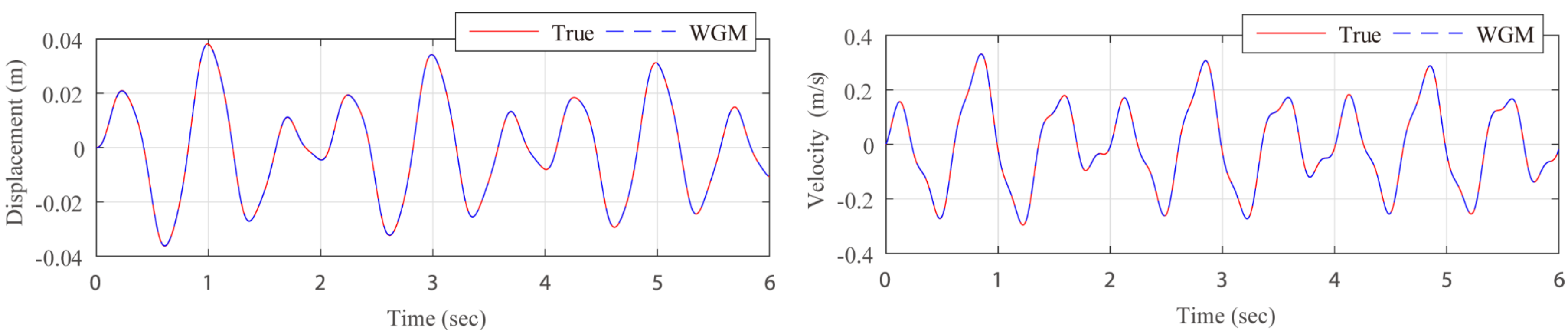
同时考虑小波分解尺度、小波阶数以及噪声的影响

3 数值算例与分析

1 单自由度系统



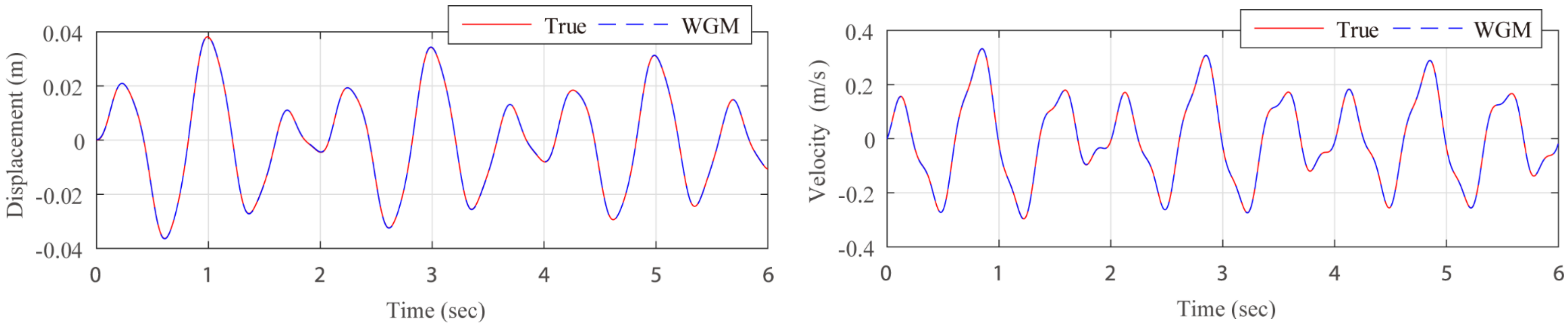
动力响应在分解尺度为6时位移和速度的重构结果



动力响应在分解尺度为8时位移和速度的重构结果

3 数值算例与分析

1 单自由度系统



动力响应在分解尺度为10时位移和速度的重构结果

动力响应在不同分辨率下和不同小波阶数下重构误差

NRMS Error (%)		The wavelet gene number		
		N=6	N=8	N=10
Scale 6	Dis.	68.42	46.53	0.81
	Vel.	49.78	34.07	0.64
Scale 8	Dis.	0.43	0.53	0.15
	Vel.	0.34	0.38	0.18
Scale10	Dis.	0.57	0.034	0.035
	Vel.	0.42	0.025	0.027

3 数值算例与分析

1 单自由度系统

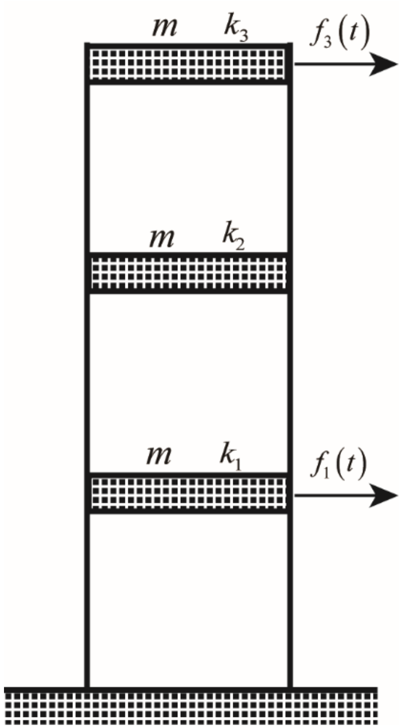
动力响应在不同噪声水平下重构误差

NRMS Error (%)		Noise Level		
		0	5%	10%
Scale 6	Dis.	68.42	68.58	72.12
	Vel.	49.78	49.89	52.50
Scale 8	Dis.	0.43	1.44	3.69
	Vel.	0.34	1.10	2.73
Scale10	Dis.	0.57	1.06	2.18
	Vel.	0.42	0.81	1.57

3 数值算例与分析

2 多自由度系统

考虑剪切型3自由度模型



结构物理参数

$m = 1200\ \mathrm{kg}$

$k_1 = k_2 = 200\,\mathrm{kN/m}$

$k_3 = 150\,\mathrm{kN/m}$

外界激励

$f_1(t) = \sin(2\pi t/3)$

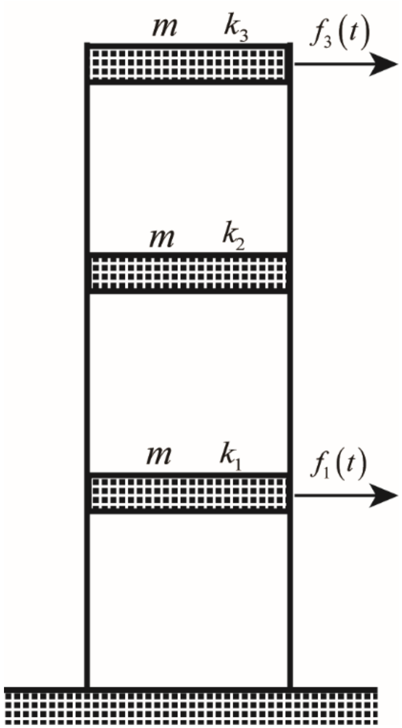
$f_3(t) = \sin(8\pi t/3)$

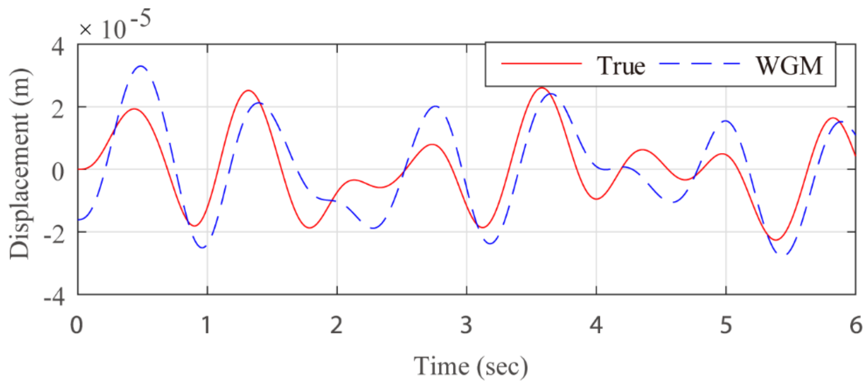
考虑小波分解尺度、小波阶数以及噪声的影响

3 数值算例与分析

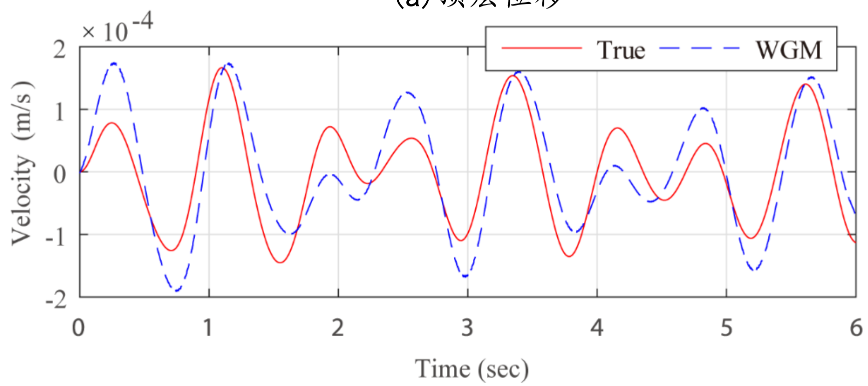
2 多自由度系统

考虑剪切型3自由度模型





(a) 顶层位移



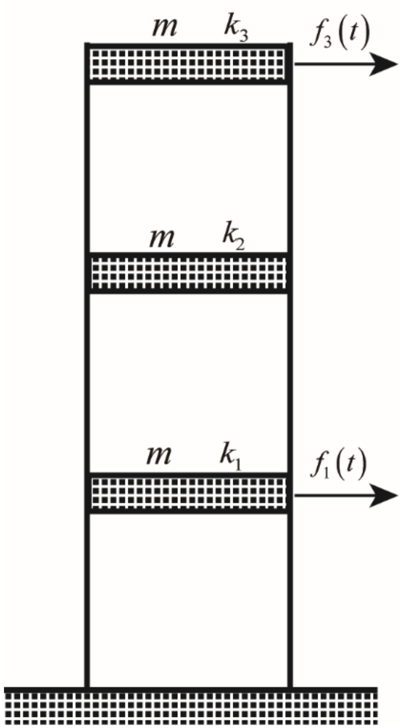
(b) 顶层速度

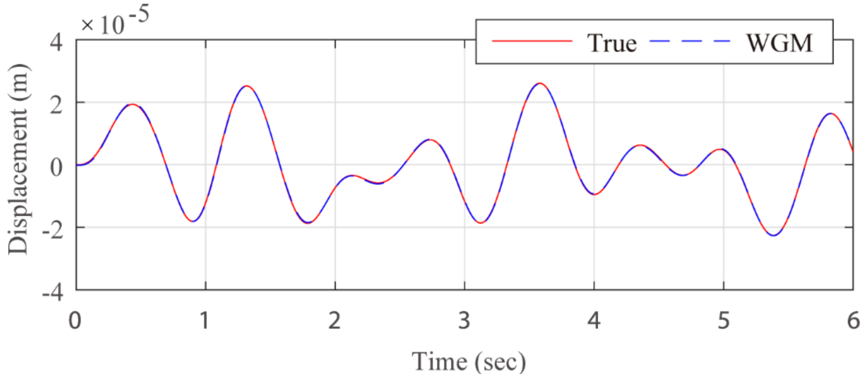
顶层动态响应在分解尺度为6时的重构结果

3 数值算例与分析

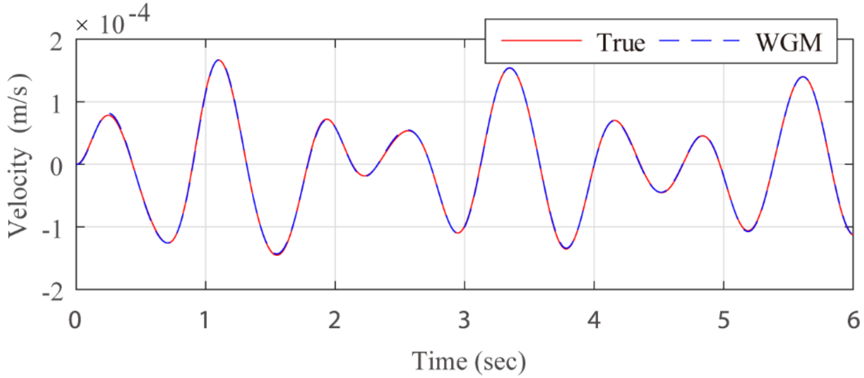
2 多自由度系统

考虑剪切型3自由度模型





(a) 顶层位移



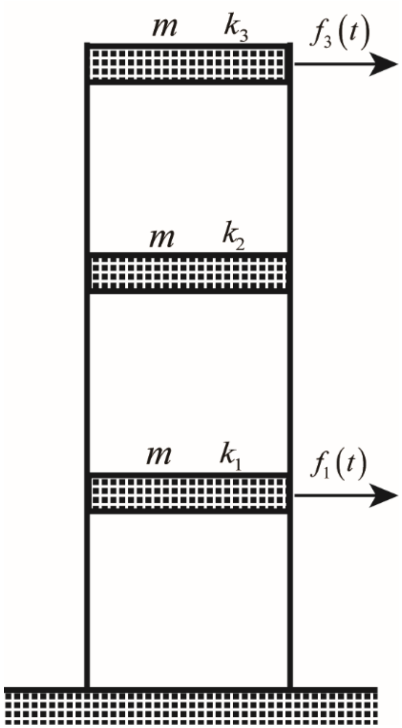
(b) 顶层速度

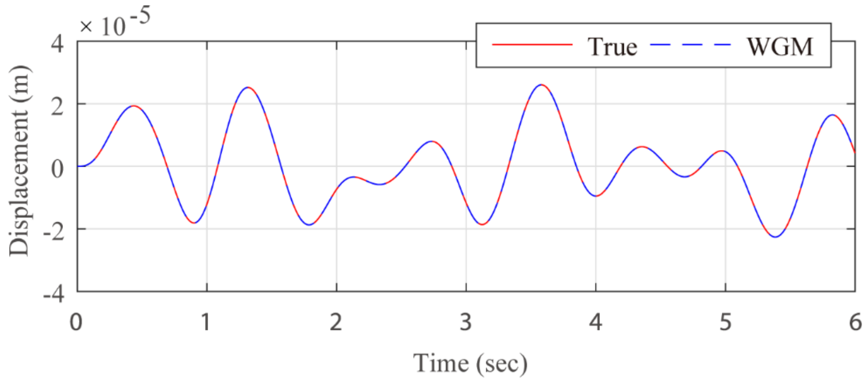
顶层动态响应在分解尺度为8时的重构结果

3 数值算例与分析

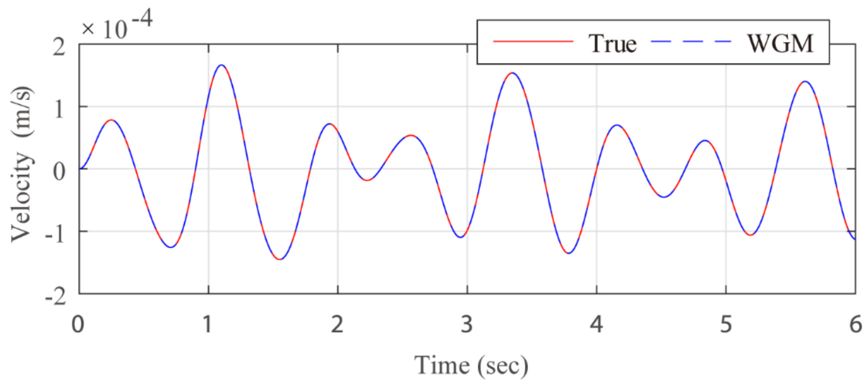
2 多自由度系统

考虑剪切型3自由度模型





(a) 顶层位移



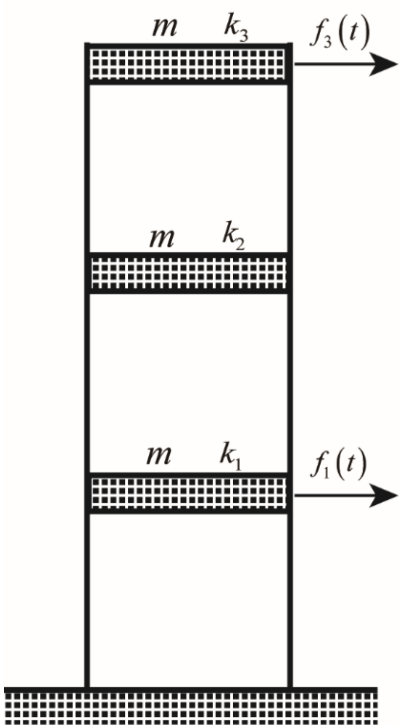
(b) 顶层速度

顶层动态响应在分解尺度为10时的重构结果

3 数值算例与分析

2 多自由度系统

考虑剪切型3自由度模型

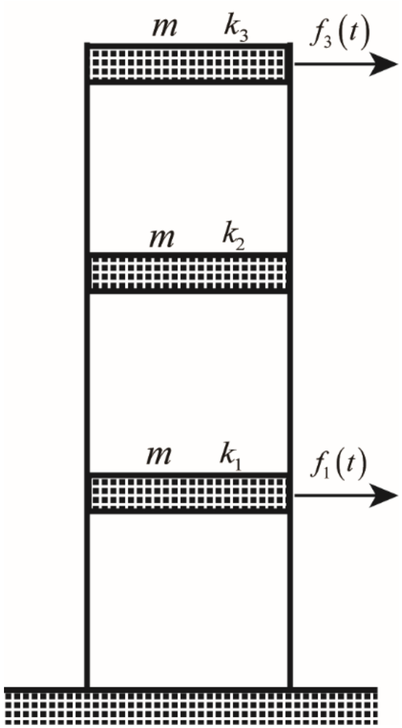


动力响应在不同分辨率下和不同小波阶数下重构误差

RMS Error (%)		The wavelet gene number								
		N=6			N=8			N=10		
		1^{st} DOF	2^{nd} DOF	3^{rd} DOF	1^{st} DOF	2^{nd} DOF	3^{rd} DOF	1^{st} DOF	2^{nd} DOF	3^{rd} DOF
Scale 6	Dis.	52.12	62.33	76.14	1.52	1.27	1.54	3.14	1.45	1.75
	Vel.	45.55	51.10	66.08	2.83	1.53	1.90	7.01	3.14	3.93
Scale 8	Dis.	1.24	1.23	1.23	0.33	0.21	0.12	0.0059	0.0043	0.0029
	Vel.	1.92	1.21	1.52	1.02	0.62	0.30	0.151	0.149	0.142
Scale10	Dis.	0.046	0.050	0.061	0.064	0.076	0.093	0.028	0.033	0.041
	Vel.	0.061	0.047	0.059	0.059	0.064	0.083	0.025	0.028	0.036

2 多自由度系统

考虑剪切型3自由度模型



在不同噪声水平下各层动力响应重构误差

RMS Error (%)		Noise Level 0			5%			10%		
		1st DOF	2nd DOF	3rd DOF	1st DOF	2nd DOF	3rd DOF	1st DOF	2nd DOF	3rd DOF
Scale 6	Dis.	52.12	62.33	76.14	52.81	63.17	77.16	51.65	61.70	75.36
	Vel.	45.55	51.10	66.08	46.10	51.79	66.95	45.33	50.60	65.44
Scale 8	Dis.	1.24	1.23	1.23	1.52	1.51	1.85	2.39	1.97	2.43
	Vel.	1.92	1.21	1.52	2.37	1.51	1.92	4.54	2.37	3.07
Scale10	Dis.	0.046	0.050	0.061	0.58	0.62	0.73	1.35	0.86	1.10
	Vel.	0.061	0.047	0.059	0.83	0.61	0.71	2.97	1.36	1.72

4 主要结论

结论

- 提出了基于小波-伽辽金的动力响应重构方法，并在单自由度系统和多自由度系统测试和验证，表明了当选择合适的**分解尺度**和**小波阶数**，动力响应可以准确的重构。
- 数值算例表明基于小波-伽辽金的动力响应重构方法具有**噪声鲁棒性**。当分解尺度为8或10时，无噪声NRMS误差小于2%，10%噪声水平下NMRS误差小于5%。
- 数值算例表明分解尺度越高小波阶数越高，动力响应重构的结果越精确，但测量点数越多，计算量越大，需要权衡**重构精度**和**计算时间**。

展望

- 自动确定小波阶数
- 结合深度学习解决响应重构问题

4 主要结论

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Sound and Vibration

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jsvi

ELSEVIER

An improved wavelet–Galerkin method for dynamic response reconstruction and parameter identification of shear-type frames

Haifeng Bu, Dansheng Wang*, Pin Zhou, Hongping Zhu

School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, 430074, Wuhan, PR China

衷心感谢各位领导和专家！
敬请批评指正！

赖 韬 博士

brightlai@njtech.com